ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

Л и п а т о в а Ф.А.

КОНГРУЭНЦИИ V_1.

В трехмерном эквиаффинном пространстве исследуется ча[стный] класс невырожденных конгруэнций V пар фигур, обра[зо]ванных эллипсом C и точкой M, инцидентной эллипсу. Отнесем конгруэнцию V к реперу $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$, где A — центр эллипса C, вектор $\bar e_1=\overline{AM}$, вектор $\bar e_2=\overline{AA_2}$ сопряжен вектору $\bar e_1$ относительно эллипса C, точка A_2 инцидентна этому эллипсу, а вектор $\bar e_3$ коллинеарен линии пересечения касательных плоскостей поверхностей (M), (A_2) соответственно в точках M и A_2.

Из рассмотрения исключается случай параллельности эт[их] касательных плоскостей и совпадения их с плоскостью эллипса C.

Эллипс C относительно репера R определяется уравнениями:

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1, \quad x^3=0. \tag{1}$$

Система пфаффовых и конечных уравнений конгруэнции V имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\omega^3=a\omega^1+b\omega^2, && \omega_2^2=s\omega^1+t\omega^2,\\
&\omega_1^1=c\omega^1+l\omega^2, && \omega_2^3=q\omega^1+r\omega^2,\\
&\omega_1^2=f\omega^1+h\omega^2, && \omega_3^1=m_1\omega^1+m_2\omega^2,\\
&\omega_1^3=n\omega^1+m\omega^2, && \omega_3^2=n_1\omega^1+n_2\omega^2,\\
&\omega_2^1=p\omega^1+k\omega^2,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&(1+c)(1+h)-lf=0,\\
&(1+p)(1+t)-ks=0.
\end{aligned} \tag{3}$$

где ω^i, ω_i^j $(i,j,k=1,2,3)$ компоненты деривационных формул репера R, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$D\omega^i=\omega^k\wedge\omega_k^i, \quad D\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0.$$

Анализируя системы уравнений (2) и (3) убеждаемся, что невырожденная конгруэнция V существует и определяется с произволом семи функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнция V называется конгруэнцией V_1, если

$$\begin{gathered}
a=b=m=q=m_1=m_2=n_1=n_2=k=h=p=l=s=0,\\
t=c=-1
\end{gathered} \tag{4}$$

Т е о р е м а I. Конгруэнции V_1 существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу соотношений (4), система уравнений (2) примет вид:

$$\omega^3=0\,,\quad \omega_2^1=0\,,\quad \omega_3^2=0\,,\quad \omega_1^1=-\omega^1,$$

$$\omega_2^2=-\omega^2\,,\quad \omega_1^2=f\omega^1\,,\quad \omega_2^3=\tau\omega^2, \tag{5}$$

$$\omega_1^3=n\omega^1,\qquad \omega_3^1=0\,.$$

Замыкая систему уравнений (5), получим три квадратичных уравнения:

$$df\wedge\omega^1+f\,\omega^1\wedge\omega^2=0,$$

$$dn\wedge\omega^1-(f\tau+n)\,\omega^1\wedge\omega^2=0, \tag{6}$$

$$d\tau\wedge\omega^2+\tau\,\omega^1\wedge\omega^2=0\,.$$

Из систем уравнений (5) и (6) заключаем, что конгруэнция V существует и определяется с произволом трех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 2. Точки пересечения диаметров AM и A ллипсом C конгруэнции V_1 являются его фокальными точками.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокальные поверхности и фо льные семейства конгруэнции (C) определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases}(x^1)^2+(x^2)^2=1\,, \quad x^3=0\,,\\ \omega_1^1(x^1)^2+\omega_2^2(x^2)^2+(\omega_2^1+\omega_1^2)x^1x^2+x^1\omega^1+x^2\omega^2=0,\\ x^1\omega_1^3+x^2\omega_2^3+\omega^3=0\,.\end{cases} \tag{7}$$

Из системы (7), учитывая (5), находим уравнения для определения координат фокальных точек эллипса C конгруэнции V_1:

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1\quad,\quad x^3=0\,,$$

$$x^1x^2\left[\tau x^1-(\tau f+n)x^2+(n-\tau)\right]=0\,, \tag{8}$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Координаты двух оставшихся фокальных точек эллипса C находятся из системы уравнений

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1\,,\qquad x^3=0\,.$$

$$\tau x^1-(\tau f+n)x^2+n-\tau=0\,. \tag{9}$$

Т е о р е м а 3. Торсы прямолинейных конгруэнций $(A\bar{e}_1)$ и $(A\bar{e}_2)$ соответствуют и высекают на поверхности (A) координатные линии.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения торсов прямолинейных конгруэнций $(A\bar{e}_1)$ и $(A\bar{e}_2)$ конгруэнции V_1 имеют вид:

$$\omega^1\omega^2=0\,.$$